Operatory na kratach Banacha
Lista 5 (Operatory na kratach wektorowych)

Zad 1. Niech X, Y kraty wektorowe. Rozważamy przestrzeni operatorów liniowych $L(X,Y)$ jako przestrzeń wektorową z porządkiem zadanym przez stożek operatorów dodatnich $L_+(X,Y)$. Pokazać, operator $T \in L(X,Y)$ jest regularny, czyli jest różnicą dwóch operatorów dodatnich, wtedy i tylko wtedy, gdy $T \leq S$ dla pewnego $S \in L_+(X,Y)$.

Zad 2. Niech X, Y kraty wektorowe. Pokazać, że operator $T \in L(X,Y)$ jest porządkowo ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X_+$ istnieje $y \in Y_+$ takie, że $T[0,x] \subseteq [-y,y]$. Wyciągnąć stąd wniosek, że każdy operator dodatni, a w konsekwencji każdy regularny, jest porządkowo ograniczony.

Zad 3. Niech X, Y kraty Banacha. Pokazać, że każdy porządkowo ograniczony operator $T \in L(X,Y)$ jest ograniczony (normowo).

Zad 4. Przypomnijmy, iż operator liniowy $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ można utożsamiać z macierzą $[t_{ji}]_{i=1,j=1}^{n,m}$ liczb rzeczywistą, gdzie $(Tx)(j) = \sum_{i=1}^n t_{ji}x(i)$ dla $x = (x(1), \ldots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$. Traktując $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ jako kraty wektorowe z porządkiem zadanym po współrzędnych pokazać, że

(1) operator T jest dodatni $\iff t_{ji} \geq 0$ dla wszystkich i, j.

(2) Każdy operator liniowy $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest regularny. Dokładniej, jeśli $T \sim [t_{ji}]_{i=1,j=1}^{n,m}$, to kładąc $t_{ij}^+ := \max\{t_{ij}, 0\}$ oraz $t_{ij}^- := \max\{-t_{ij}, 0\}$ dla operatorów $T^+ \sim [t_{ji}^+]_{i=1,j=1}^{n,m}$ oraz $T^- \sim [t_{ji}^-]_{i=1,j=1}^{n,m}$ mamy $T = T^+ - T^-$. W szczególności, $|T| = T^+ + T^- \sim [|t_{ji}|]_{i=1,j=1}^{n,m}$.

(3) przestrzeń $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wszystkich operatorów liniowych z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$ z porządkiem zadanym przez stożek operatorów dodatnich jest kratą wektorową izomorficzną z kratą wektorową $\mathbb{R}^{nm} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ z porządkiem zadanym po współrzędnych.

Hint: Odwzorowanie $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni T \mapsto [t_{ji}]_{i=1,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ zadaje żądany izomorfizm

Zad 5. Rozważmy kratę Banacha $C(M)$, gdzie M przestrzeń zwarta, ze strukturą zadaną punktowo i normą supremum. Pokazać, że

(1) Każda funkcja ciągła $a \in C(M)$ definiuje ograniczony operator $T_a \in B(C(M))$, nazywany *operatorem mnożenia*, wzorem

$$(T_a x)(t) = a(t)x(t), \qquad x \in C(M), t \in M.$$

(2) Każdy operator T_a jest regularny oraz T_a jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geq 0$ jest funkcją dodatnią (nieujemną).

(3) Odwozorowanie $C(M) \ni a \mapsto T_a \in B(C(M))$ jest liniową izometrią zachowującą porządek.

Zad 6. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą oraz niech $p \in [1, \infty)$. Pokazać, że

(1) Każda istotnie ograniczona funkcja $a \in L^\infty(\mu)$ definiuje ograniczony operator $T_a \in B(L^p(\mu))$, nazywany *operatorem mnożenia*, wzorem

$$(T_a x)(t) = a(t)x(t), \qquad x \in L^p(\mu), t \in \Omega.$$

(2) Każdy operator T_a jest regularny oraz $T_a \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geq 0$ μ-prawie wszędzie.

(3) Odwozorowanie $L^\infty(\mu) \ni a \mapsto T_a \in B(L^p(\mu))$ jest liniową izometrią zachowującą porządek.

Zad 7. Niech $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Pokazać, że operator całkowy $T_K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ dany wzorem

$$(T_K x)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds, \qquad x \in L^2([0,1]$$

jest poprawnie określonym operatorem ograniczonym, a nawet regularnym. Uzasadnić, że traktując $L^2([0,1] \times [0,1])$ jako kratę Banacha, ze standardową strukturą, odwzorowanie $L^2([0,1] \times [0,1]) \ni K \mapsto T_K \in B(L^2[0,1])$ jest liniową kontraktywną injekcją zachowującą porządek.